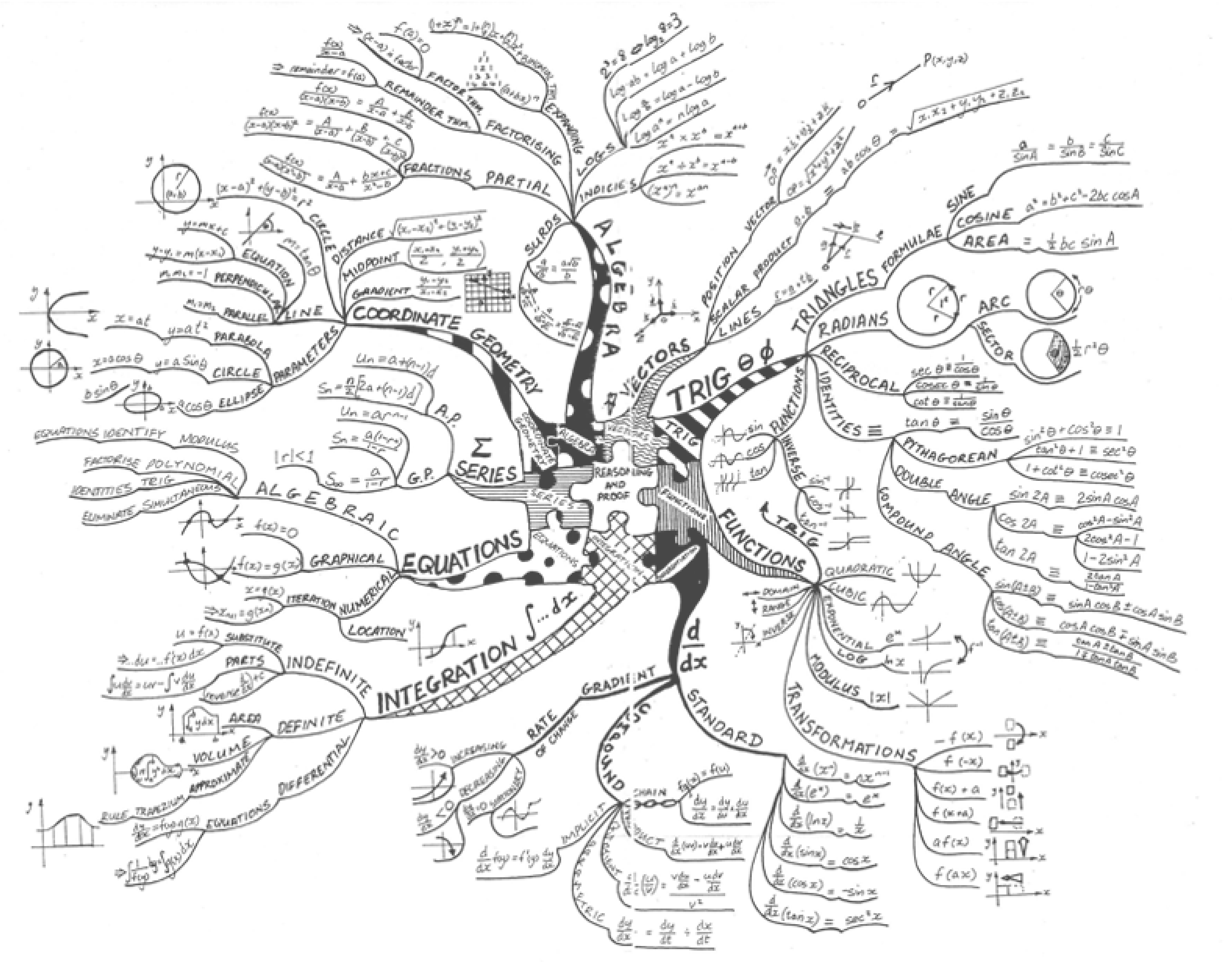
(GÉOMÉTRIE CLASSIQUE)



INTRODUCTION

The goal of this Madcap Flare project is to demonstrate our ability, as technical writers, to manage a single-source documentation with different and conditional outputs. We strongly hope this project will allow us to pass the Madcap Advanced Developer certification.

As specified, the project contains at least:

- 12 topics
- 6 links
- 3 images
- a skin
- a page layout
- a master page
- 2 condition tags
- 2 different output types

All the content (text, images) comes from Wikipedia.

TABLE DES MATIÈRES

GÉOMÉTRIE CLASSIQUE ..... **I**

INTRODUCTION ..... **II**

TABLE DES MATIÈRES ..... **III**

1. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE **1**

2. COURBES **7**

2.1 Cercle 7
2.2 Ellipse 9

3. POLYGONE **11**

3.1 Triangle 13
3.2 Quadrilatère 21
3.2.1 Carré 24
3.2.2 Losange 25
3.2.3 Parallélogramme 26
3.2.4 Rectangle 27

4. FORMULAIRE DE GÉOMÉTRIE CLASSIQUE **29**

1. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

La géométrie euclidienne commence avec les *Éléments* d'Euclide, qui est à la fois une somme des connaissances géométriques de l'époque et une tentative de formalisation mathématique de ces connaissances. Les notions de droite, de plan, de longueur, d'aire y sont exposées et forment le support des cours de géométrie élémentaire. La conception de la géométrie est intimement liée à la vision de l'espace physique ambiant au sens classique du terme.

Les conceptions géométriques connaissent, depuis les travaux d'Euclide, des évolutions suivant trois axes principaux :

1. Pour vérifier les critères de rigueur logique actuels, la définition axiomatique subit de profonds changements, l'objet mathématique restant néanmoins le même.
2. Pour ne plus se limiter aux dimensions deux et trois et pour permettre l'élaboration d'une théorie plus puissante, un modèle algébrique de la géométrie est envisagé. L'espace euclidien est maintenant défini comme un espace vectoriel ou affine réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.
3. Enfin, la structure géométrique euclidienne n'est plus la seule envisageable ; il est établi qu'il existe d'autres géométries cohérentes.

Figure 1: Euclide

Plus de 2000 ans après sa naissance, l'espace géométrique euclidien est un outil toujours efficace aux vastes domaines d'applications. Par exemple, l'espace des physiciens reste encore principalement du domaine de la géométrie euclidienne, l'astronomie étant l'exception la plus notoire.

Son aspect mathématique est traité de manière didactique dans l'article produit scalaire. L'article se fonde sur la formalisation d'un vecteur à l'aide d'un bipoint, développé dans vecteur. Une approche plus poussée, fondée sur la formalisation axiomatique de l'espace vectoriel est développée dans espace euclidien.

L'approche euclidienne de la science de l'espace

La géométrie euclidienne au sens des antiques traités du plan et de l'espace ; elle est souvent présentée comme une géométrie « de la règle et du compas ». Les objets considérés sont les points, les segments, les droites, les demi-droites, avec leurs propriétés d'incidence (la règle), ainsi que les cercles (le compas). Les enjeux essentiels sont l'étude de figures et la mesure.

Les outils de la géométrie d'Euclide

La construction d'Euclide se fonde sur cinq axiomes :

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.

2. COURBES

2.1 Cercle

Un cercle est une courbe plane fermée constituée des points situés à égale distance d'un point nommé centre. La valeur de cette distance est appelée rayon du cercle. Celui-ci étant infiniment variable, il existe donc une infinité de cercles pour un centre quelconque, dans chacun des plans de l'espace.

Dans le plan euclidien, il s'agit du « rond » qui est associé en français au terme de cercle. Dans un plan non euclidien ou dans le cas de la définition d'une distance non euclidienne, la forme peut être plus complexe. Dans un espace de dimensions quelconque, l'ensemble des points placés à une distance constante d'un centre est appelé sphère.

D'autres formes peuvent être qualifiées de « rondes » : les surfaces et solides dont certaines sections planes sont des cercles (cylindres, cônes, etc.).

Pendant longtemps, le langage courant employait ce terme autant pour nommer la courbe (circonférence) que la surface qu'elle délimite. De nos jours, en mathématiques, le cercle désigne exclusivement la courbe ; la surface étant appelée disque.

Le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre définit le nombre pi.

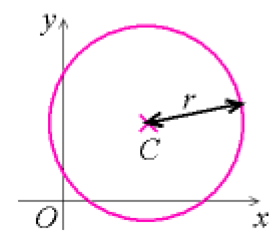


Figure 8: Cercle de centre C et de rayon r dans un plan muni d'un repère orthonormé

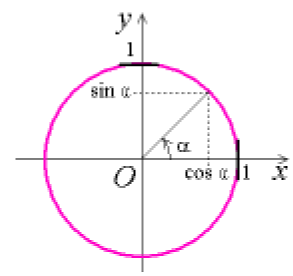


Figure 9: Cercle unité : centré sur l'origine du repère et de rayon 1 ; définition du sinus et du cosinus

Géométrie euclidienne

Un cercle est une courbe plane fermée constituée des points situés à égale distance d'un point nommé centre. La valeur de cette distance est appelée rayon du cercle

Le cercle est une ellipse dont les foyers sont confondus au centre du cercle ; la longueur du grand axe est égale à la longueur du petit axe. C'est une conique dont l'excentricité vaut 0. Elle peut être obtenue par l'intersection d'un plan avec un cône de révolution lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution du cône (on parle parfois de « section droite » du cône).

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, le cercle unité ou cercle trigonométrique est le cercle dont le centre est l'origine du repère, et dont le rayon vaut 1.

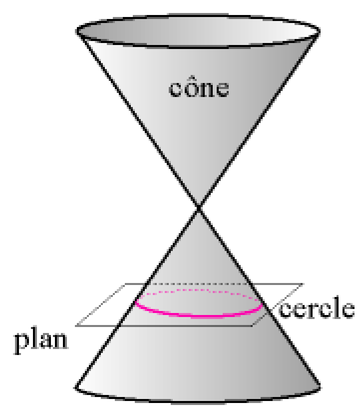


Figure 10: Un cercle est une section droite d'un cône de révolution.

La constante e de proportionnalité des deux distances, appelée excentricité de l'ellipse, est sans dimension ; elle est caractéristique de la forme de l'ellipse, indépendamment de ses isométries (translations et/ou rotations) ou homothéties (de rapport non nul) dans le plan affine, et donc du choix arbitraire de repère orthonormé pour ce plan ; elle détermine tous les autres rapports de distances (et toutes les différences angulaires) mesurés sur l'ellipse.

Notons K le projeté orthogonal de F sur (d). (KF) est alors clairement un axe de symétrie de l'ellipse appelé axe focal. Les points d'intersection de l'ellipse avec son axe focal sont appelés des sommets de l'ellipse. La médiatrice du segment dont les extrémités sont ces deux sommets est également un axe de symétrie de l'ellipse, appelé petit axe de l'ellipse.

Une telle ellipse a donc deux droites directrices, symétriques l'une de l'autre par rapport au petit axe de l'ellipse et deux foyers associés également symétriques par rapport au petit axe.

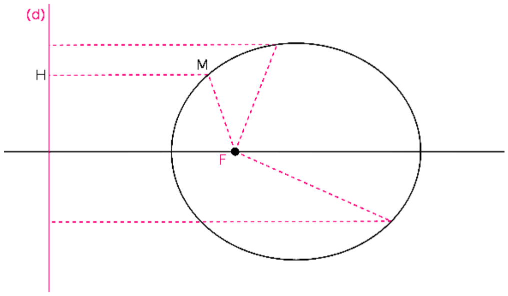


Figure 14: Construction d'une ellipse par foyer et directrice. Ici avec une excentricité de 1/2.

Une ellipse est également entièrement déterminée par la position de ses foyers et son excentricité, ou bien encore par la position de ses droites directrices (parallèles entre elles), et son excentricité.

En géométrie euclidienne, cette définition de l'ellipse exclut le cercle , le segment de droite et le point.

Équation cartésienne

Dans le repère défini par le grand axe et le petit axe de l'ellipse, son équation est (si l'axe focal est x) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec a > b > 0.

Si l'axe focal est y alors a et b sont inversés.

Si une ellipse n'est pas centrée à l'origine d'un système de coordonnées, mais que son grand axe et son petit axe restent parallèles aux axes des coordonnées, celle-ci peut être spécifiée par l'équation suivante :

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

où les paramètres et sont les coordonnées du centre de l'ellipse.

Comme toute conique, une ellipse possède une équation de la forme :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

B vaut 0 si les axes de l'ellipse sont parallèles à ceux de coordonnées.

D'autres formules font appel à la longueur des côtés (formule de Héron) ou aux coordonnées des sommets dans un repère orthonormé.

Périmètre

Le périmètre d'un triangle est simplement la somme des trois longueurs de côté. Pour un périmètre donné, l'aire intérieure du triangle est majorée par celle du triangle équilatéral correspondant :

$$\mathcal{A} \leq \frac{p^2\sqrt{3}}{36}$$

Relations trigonométriques

Les longueurs de côté d'un triangle et les mesures de ses angles satisfont plusieurs relations qui permettent de toutes les calculer à partir de certaines d'entre elles.

Il s'agit d'une part, outre la formule de la somme des angles, d'une relation entre l'aire, la mesure d'un angle et la longueur des deux côtés adjacents :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$$

laquelle permet d'obtenir la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

où R est le rayon du cercle circonscrit ;

d'autre part, du théorème d'Al-Kashi (ou théorème de Carnot ou encore loi des cosinus) qui généralise le théorème de Pythagore :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

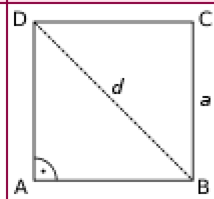
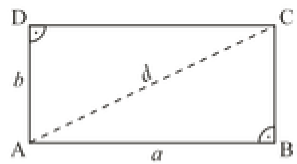
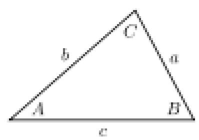
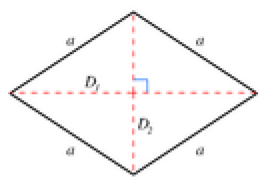
Utilisations

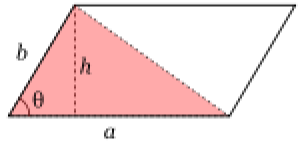
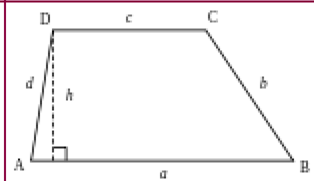
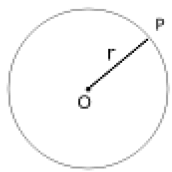
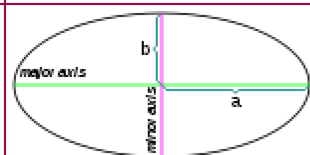
Triangulation

Les relations métriques dans le triangle permettent d'évaluer des distances à partir de mesures angulaires, comme en navigation maritime, en géodésie et en astronomie. C'est selon ce principe qu'a été mesuré le méridien terrestre pour la définition du mètre4.

4. FORMULAIRE DE GÉOMÉTRIE CLASSIQUE

Ce formulaire de géométrie classique récapitule diverses formules reliant algébriquement des mesures de longueur, d'aire ou de volume pour des figures de géométrie euclidienne.

Nom	Représentation	Périmètre P	Aire intérieure $\mathcal{A}$
Carré		$4a$	a^2
Rectangle		$2(a+b)$	$a \times b$
Triangle		$a+b+c$	$\frac{1}{2}b \times h$
Losange		$4a$	$\frac{1}{2}D_1 \times D_2$

Parallélogramme		$2(a+b)$	$a \times h$
		$a+b+c+d$	$\frac{1}{2}(a+c) \times h$
Cercle		$2\pi r$	πr^2
Ellipse		(non algébrique)	πab